第 9 章　真空中的静电场

一　用电场强度定义求电场强度（已在大物 1 中考查）

1. **电荷与库仑定律**

① **电荷**

· 自然界只存在正、负两种电荷，同种电荷之间为排斥力，异种电荷之间为吸引力

· 电荷守恒定律：**一个孤立系统内无论发生什么过程，总电荷数保持不变。电荷既不能被创造、也不能被消灭，它只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一个部分转移到另一个部分**

② **库仑定律**

· **真空中两个静止的点电荷 q_1 与 q_2 之间的相互作用力的大小和 q_1 与 q_2 的乘积成正比，和它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸**

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}}$$

$\boxed{\varepsilon_0\text{：真空中的介电常数} = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}}$

③ **电力叠加原理**

空间存在多个点电荷时，某点电荷受到的静电力等于其它点电荷各自单独存在时静电力的矢量和

3. **电场与电场强度**

① 电场的概念

· 电荷在其周围空间激发电场，通过电场对其他电荷产生力的作用

· 电场是物质的一种形态，可以脱离电荷而存在

② 电场强度的定义

· 单位试验电荷（电量小，可看成点电荷）在该点所受电场力

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}}$$

单位：N/C 或 V/m

③ **场强叠加原理**

· 点电荷系产生的电场在某点场强等于各点电荷单独存在时产生的电场在该点场强之和

用电场强度定义与场强叠加原理求解电场强度

· 根据电场强度的定义，可以得到**点电荷的电场强度**

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

· 根据场强叠加原理，带电体产生的电场可以看作多个点电荷产生的电场的叠加

· 因此可以求出每个点电荷产生的场强分布，再将这些场强相加

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i}$$

r_i： P 与点电荷 q_i 的距离

如果电荷是连续分布的，就需要引入电荷密度（包括线密度 λ 、面密度 σ 、体密度 ρ ）

并使用微元法，将带电体分割成微元，微元视作一个带电量为 $dq=\lambda dl$（或 σdS、ρdV）的点电荷

由该微元电荷产生的场强记作 $d\boldsymbol{E}$，表示出 $d\boldsymbol{E}$ 后，对所有电荷积分即可

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\int d\boldsymbol{E}=\int \frac{dq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

· 如果对微元法感到迷茫，不妨回去看看《微积分（甲）Ⅱ》中多元函数积分学这一部分

二　用高斯定理求电场强度（已在大物 1 中考查，但大物 2 依然常用）

1. 电场线与电通量

① 电场线

· 为形象地描述电场分布，在电场中作的反映电场中各点场强的大小和方向的**假想线**

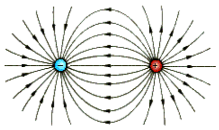
· 规定：① 电场线上每一点的切线方向与该点场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致

② 任一点通过垂直于 $\boldsymbol{E}$ 的单位面积 dS 的电场线数目 dN 等于该点场强大小

· 性质：① 电场线起自正电荷，终止于负电荷，不会在无电荷处中断

② 任意两条电场线不会相交

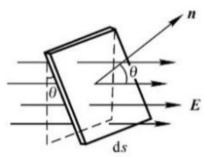
③ 静电场中的电场线不形成闭合曲线



② 电通量

· 定义：穿过曲面 S 的电通量等于穿过该曲面的电场线条数（联系第二类曲面积分）

$$\Phi_e=\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$



· 对于闭合曲面，规定法线方向 $\boldsymbol{n}$ 为自内而外的方向

· 特殊情况：① 均匀电场 E、平面 S 垂直于 E $\rightarrow$ $\Phi_e=ES$

② 均匀电场 E、平面 S 与 E 法线夹角为 θ $\rightarrow$ $\Phi_e=ES\cos\theta=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S}$

2. 高斯定理

· **通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和除以 ε_0**

$$\boxed{\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}$$

用高斯定理求解电场强度

· 若带电体的分布存在对称性，则我们能找到一个闭合曲面，其上的电场强度分布也存在对称性

这个闭合曲面的电通量积分可以简化，直接由 E 代数表出，通过高斯定理就能建立方程，求解出 E

3. 常用场强结论

· **均匀带电球面（电量 q）** $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

· **无限大平板（面密度 σ）** $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

· **均匀带电圆柱面（线密度 λ）** $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

（注意电场的方向）

三　求电势

1. **静电场的环路定理**

① 电场力做功路径无关

· **当试验电荷在静止点电荷电场中移动时，电场力所做的功，仅与试验电荷电量的大小及其起点和终点的位置有关，而与电荷移动的路径无关**

② 静电场环路定理

· **在静电场中，电场强度沿任意闭合回路的线积分恒等于零**

$$\boxed{\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0}$$

· 这两条表述是等价的，也说明了静电场是保守场，因此可以引入势能相关的概念

2. **电势能与电势**

① 电势能

· **当试验电荷 q_0 从 a 点移动至 b 点，其间电场力所做的功应等于电荷静电势能增量的负值**

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-(W_\mathrm{b}-W_\mathrm{a})=-\Delta W$$

· 含义：电荷从高电势能点移向低电势能点，电势能减小，电场力做正功

电荷从低电势能点移向高电势能点，电势能增加，电场力做负功

· 参考点：电势能是相对的，需要规定一个电势能为 0 的参考点

若场源电荷分布在空间有限区域内时，通常规定无限远处试验电荷为 0，因此电势能

$$W_\mathrm{P}=\int_P^\infty q_0\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

② 电势

· **某点电势能与其电荷量的比值，是只与位置有关的函数**

$$\boxed{U_P=\frac{W_P}{q_0}=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

P_0 是电势为 0 的参考点，可以是无穷远处（∞）

· 数值上等于单位正电荷在该处具有的电势能

· 引入电势之后，电场力做功可以表示为

$$\boxed{A_{ab}=q_0\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0(U_a-U_b)}$$

用电势定义求解电势

· 当电场分布已知或容易求出（通过高斯定理）时，用定义式 $U_P=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 即可求出电势

· 注意这是第二类曲线积分，要先选择一条方便求解的路径（一般就是直线），然后转化为定积分

· 注意参考点（零电势点）的选择，是选择某个点还是无穷远处

例 1　求半径 R，总电量为 Q 的均匀带电球面的电场中的电势分布（规定无穷远处为参考点）

解　根据高斯定理求出电场分布：

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r, & r>R\\ 0, & r<R\end{cases}$$

因此距球心为r一点P的电势（$r>R$）（路径是从点P沿球径向直线移动至无穷远点）

$$U_P=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_r^{\infty}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad（r>R）$$

当$r<R$时，按照相同路径分段积分，得到$U_P=\int_r^R 0\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$（$r<R$）

③ **电势叠加原理**

· 点电荷系电场中某点的电势，等于每一个点电荷单独存在时在该点所产生的电势的代数和

用电势叠加原理求解电势

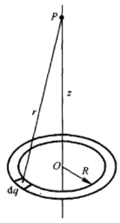
· 根据电势定义，可求出单个点电荷q产生的电势分布为（r是该点到点电荷的距离）

$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

· 因此根据电势叠加定理，可以分别算出各个点电荷在某点的电势，然后相加

若电荷连续分布，则分解为微元电荷$\mathrm{d}q$，表示为电荷密度与几何微元的乘积，表示出$\mathrm{d}U$后积分

例 2　求半径为R均匀带电圆环（总电量q）轴线上一点的电势（规定无穷远处为参考点）



解　建立如图坐标系，设微元电荷产生的电势为$\mathrm{d}U$，电荷线密度$\lambda=\dfrac{q}{2\pi R}$

表示出$\mathrm{d}U$积分，得到总电势$U_P=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$

一种特殊情况

· 即使球面不均匀带电，球面电荷在球心处产生的电势也只和球面总电量有关：

$$U=\int_S\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_S\mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\quad（即使不知道\mathrm{d}q的表达式也能求出）$$

四　用电势分布求解电场

1. 电场与电势梯度的关系

· **电场中任一点的电场强度矢量，等于该点电势梯度矢量的负值**

$$\boxed{\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,U=-(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z})}$$

例 3　某区域内电场的电势分布函数为$U=ax^2+bxy-cz^3$，其中a、b、c为常量。则该区域中任一点的电场强度$\boldsymbol{E}=$__________________。

解　代入公式，分别对U求三个偏导数，然后并成向量，记得加上负号

$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,U=-(2ax+by,bx,-3cz^2)$　或写成　$\boldsymbol{E}=-(2ax+by)\vec{i}-bx\vec{j}+3cz^2\vec{k}$　的形式